IV Powiatowy Konkurs Matematyczny

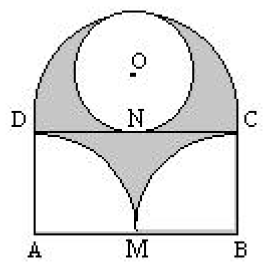
dla uczniów gimnazjum

Rok szkolny 2003/2004

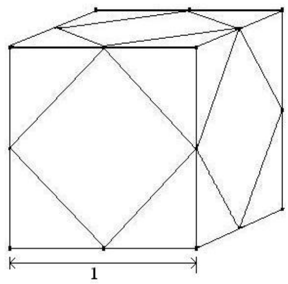
Etap I

Rozwiąż zadania, czas 120 minut

1. W pewnej klasie dziewczęta stanowiły 62,5% liczby uczniów. Do klasy przybyła jedna osoba i wówczas dziewczęta stanowiły 64% liczby uczniów. Ilu chłopców jest w tej klasie?
2. Mówi Adam do Tomka: „Mam trzy razy więcej lat niż Ty miałeś wtedy, kiedy ja miałem tyle lat, ile Ty masz teraz . Kiedy osiągniesz mój wiek, będziemy mieli razem 112 lat.” Ile lat ma Tomek, a ile Adam?
3. Niech *ABCD* będzie prostokątem o wymiarach 2*a* i *a*, na którego boku *CD*, jako na średnicy, zbudowano (na zewnątrz prostokąta) półokrąg (patrz rys.). Okrąg o środku O jest styczny do tego półokręgu oraz do odcinka *CD* w jego środku *N*. Punkt *M* jest środkiem odcinka *AB*, zaś łuki *MC* i *MD* są łukami okręgu o promieniu długości *a*.
   Oblicz pole i obwód zamalowanej figury.



4. Bryłę (patrz rysunek obok) otrzymujemy przez obcięcie wszystkich wierzchołków sześcianu jednostkowego począwszy ze środka każdej krawędzi. Oblicz pole powierzchni powstałej bryły.



5. Wykaż, że $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązania i punktacja

ZADANIE 3   (6 punktów)

x – ilość dziewcząt

y – ilość chłopców

osoba, która przybyła do klasy musiała być dziewczyną – zwiększyła się liczba procent

$$x = 0{,}625(x + y)$$

$$(x+1) = 0{,}64(x + y + 1)$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \end{cases}$$

1. Analiza zadania 1 punkt
2. Ułożenie układu równań 2 pkt

3.Rozwiązanie układu 2 pkt

4.Odp 1 punkt

ZADANIE 2 (6 punktów)

Kiedy?	**Adam**	**Tomek**	**Razem**
Wtedy, kiedy Adam miał tyle ile Tomek ma teraz	**y**	**x**	
Teraz	**3x**	**y**	
Wtedy, kiedy Tomek osiągnie wiek Adama teraz	**3x+3x-y**	**3x**	**112**

$$\begin{cases} 3x + 3x - y + 3x = 112 \\ 3x - y = y - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 32 \end{cases}$$

odp. Adam ma 48 lat, a Tomek 32 lata.

1. Analiza zadania 1 punkt
2. Ułożenie układu równań 2 pkt

3.Rozwiązanie układu 2 pkt

4.Odp 1 punkt

ZADANIE 3 (4 punkty)

Obwód zakreskowanej figury składa się z okręgu o promieniu *a* i okręgu o promieniu *a/2* , a więc
$2\pi a+2\pi*a/2=3\pi a$ *(2pkt)*

Pole zakreskowanej figury składa się z prostokąta po wycięciu z niego koła o promieniu *a*/2, a więc

$a*2a - \pi*(\frac{a}{2})^2 = a^2(2-\frac{\pi}{4})$ *(2 pkt)*

ZADANIE 4 (4 punkty)

Pole powierzchni powstałej bryły składa się z 8 trójkątów równobocznych o boku $\sqrt{2}$ i 6 kwadratów o przekątnej 1, a zatem

$$P=8*\frac{(\sqrt{2})^2*\sqrt{3}}{4}+6*\frac{1}{2}*1*1$$

$$P=4\sqrt{3}+3$$

ZADANIE 5 (5 punktów)

Po podniesieniu liczby $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ do kwadratu zgodnie z wzorem skróconego mnożenia na kwadrat sumy otrzymujemy:

$$17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+2*\sqrt{17+12\sqrt{2}}*\sqrt{17-12\sqrt{2}}=$$

$$34+2*\sqrt{17^2-(12\sqrt{2})^2}=34+2*\sqrt{289-288}=34+2=36$$

Jedyną liczbą dodatnią, której kwadrat wynosi 36 jest liczba naturalna 6, co należało dowieść.